Revue de l'Université du Burundi Série-Sciences Exactes et Naturelles

Volume **32** (2022) 30-40 www://http://revue.ub.edu.bi/JUB

# Fonctions de répartition et valeurs moyennes d'une classe de fonctions arithmétiques sur les entiers friables et sans facteur carré

**Servat Nyandwi*, Pascal Ndoricimpa, Rénovat Nkunzimana, Anaclet Congera**

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université du Burundi, B.P. 2700. Bujumbura, Burundi.
Centre de Recherche en Mathématiques et Physique (CRMP).
*** Auteur de correspondance: Email / servat.nyandwi@ub.edu.bi**

**Reçu**: le 29 décembre 2021
**Accepté pour publication**: le 25 mars 2022
**Publié en ligne pour la première fois**: le 31 mars 2022

## Abstract

In this study, we establish the properties of a class of arithmetic functions taking values on integers without large prime factors and squared integers. These properties are centred on the distribution functions and the average values on the ordinary integers and on integers without large prime factors. We show that the studied function admit distribution functions, on the one hand. On the other hand, we prove that the density of integers without a squared factor has an effect on the mean values on integers without large prime factors and squared integers. In addition to this, we improve on the error term, established by Mongi Naîmi, of the mean on integers without large prime factors without a square factor. As applications, we consider the functions: Euler's indicator, sum of divisors of a generic integer $n \geq 1$ and the Dedekind function as well as their generalisation.

**Keywords**: *Distribution function, mean values, integers without a squared factor, integers without large prime factors, arithmetic function, sum of divisors, Euler's function and Dedekind function*

## Résumé

Dans cette étude, nous établissons les propriétés d'une classe de fonctions arithmétiques prenant les valeurs sur les entiers friables et sans facteur carré. Ces propriétés sont centrées sur les fonctions de répartition et les valeurs moyennes sur les entiers ordinaires et les entiers friables de ces fonctions. Nous montrons que les fonctions étudiées admettent des fonctions de répartition, d'une part. D'autre part, nous prouvons que la densité des entiers sans facteur carré a un effet sur les valeurs moyennes sur les entiers friable et sans facteur carré. En plus de cela, nous améliorons le terme d'erreur, établi par Mongi Naimi, de la moyenne des entiers friables sans facteur carré. Comme applications, nous considérons les fonctions: indicatrice d'Euler, somme des diviseurs d'un entier générique $n \geq 1$ et la fonction de Dedekind ainsi que leur généralisation.

**Mots clés**: *Fonction de répartition, valeurs moyennes, entiers sans facteur carré, entiers friables. Fonction arithmétique, somme des diviseurs, indicatrice d'Euler et fonction de Dedekind.*

## 1. Introduction

### 1.1. Introduction partielle

En théorie des nombres, la factorisation d'un entier$n \geq 1$ occupe une grande place dans l'étude des propriétés de certains entiers. Parmi ces entiers, il y a les entiers sans facteur carré, les entiers $y-$ friables, $(y \geq 1)$, les diviseurs unitaires et les entiers $y-$ criblés (G. Tenenbaum, 1995 ; A. Ivic , 1985; Mongi Naïmi, 1987; S. Gaboury, 2007). Depuis longtemps, on pensait que la théorie des nombres est un concept purement abstrait mais l'évolution de la technologie de l'information (TIC) a mis en évidence la contribution de cette théorie en cryptographie (Sabah Al Fakir, 2003). Une de ces contributions de la théorie des nombres en cryptographie est fondée sur la factorisation d'un entier $n$ comme un produit de deux grands nombres premiers. Il est donc naturel de s'intéresser aux propriétés de la factorisation d'un entier $n \geq 1$. Dans cette optique, nous avons jugé nécessaire d'étudier en moyenne une certaine catégorie des diviseurs via les valeurs prises par des fonctions arithmétiques. La complexité de dénombrer certains sous-ensembles de $N$ (G. Tenenbaum, 1995), nous a contraints à nous limiter à une classe de fonctions arithmétiques. Cette contrainte concerne la convergence des séries de Dirichlet (G.Tenenbaum, 1995) associées aux fonctions arithmétiques étudiées. Plus précisément, pour une fonction arithmétique additive, nous imposons que la série $\sum_{p\geq 2}\frac{|f(p)|}{p}$ (1) converge, cas de l'étude de la fonction de répartition. Lorsque la fonction $f$ est multiplicative, la condition précédente est remplacée par $\sum_{p\geq 2}\frac{|f(p)-1|}{p^{\delta}}$ (2) pour un certain réel $\delta$ compris entre 0 et 1, cas de l'estimation des valeurs moyennes. La relation (1) sera utilisée pour montrer l'existence des fonctions de répartition d'une fonction arithmétique additive. Nous ferons recours à la seconde relation pour estimer les valeurs moyennes sur les entiers ordinaires d'une part, et d'autre part, sur les entiers friables et les entiers sans facteur carré.
Avant de présenter la suite de ce travail, nous introduisons quelques notations utilisées en mathématique.

La lettre $p$ désigne un nombre premier $\geq 2$. L'écriture $p^r//n$ signifie $p^r$ est un diviseur de $n$ mais $p^{r+1}$ ne l'est pas.

L'expression $log$ désigne le logarithme népérien.

Soient$f$ et $g$ deux fonctions arithmétiques définies sur $[c,+\infty[$ pour $c$ un réel positif avec $g(x) > 0$.

On écrira que $f(x) = O\big(g(x)\big)$ ou $f(x) \ll g(x)$ lorsque $x \to +\infty$ s'il existe une constante $M > 0$ et un réel $x_0$ tels que $|f(x)| \leq Mg(x)$ pour tout $x \geq x_0$.

Par exemple, on écrira que

$$\int_2^x \frac{1}{logt}dt = \frac{x}{logx} + O\left(\frac{x}{(logx)^2}\right)$$

et $\int_2^x \frac{1}{logt}dt - \frac{x}{logx} \ll \frac{x}{(logx)^2}$.

On écrira que $f(x) = 0\big(g(x)\big)$ au voisinage de l'infini si $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

De plus on écrira que $f(x) \approx g(x)$ s'il existe un réel $x_0$ et des constantes $M_1$, $M_2$ telles que $M_1 g(x) \leq f(x) \leq M_2 g(x)$ pour tout $x \geq x_0$.

Finalement la notation $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \to +\infty$ signifie $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Pour un nombre complexe"$s$", on écrit $s = \sigma + it$, avec $\sigma$ et $t$ deux réels quelconques.

A part ces notations asymptotiques, nous aurons besoin des fonctions suivantes. , $\omega(n) = \sum_{p/n} 1$ , $\tau(n) = \sum_{d/n} 1$,

$$\mu(n) = \begin{cases}(-1)^{\omega(n)}\\ 0\end{cases}$$

si $n$ est sans facteur carré respectivement dans le cas contraire, $\sigma(n) = \sum_{d/n} d$,

$\varphi(n) = \sum_{1\leq m\leq n,(m,n)=1} 1$, $P(n)$ est le plus grand facteur premier de $n$, avec convention $P(1) = 1$ et la fonction de Dickman $\rho(u)$vérifiant

$u\rho'(u) = -\rho(u-1)(u > 1)$, $\rho(u) = 1$ $(0 \leq u \leq 1)$ et on pose également $\rho(u) = 0$ pour $u < 0$ (3). (G. Tenenbaum, 1995; H. Smida, 1991). Ces fonctions seront longuement utilisées tout au long de ce travail. Les fonctions que nous étudions dans cet article sont liées aux fonctions précédentes, plus précisément, nous nous intéressons aux fonctions arithmétiques suivantes:

$\frac{1}{\tau(n)}\sum_{d/n} f(d)$ ;$\frac{1}{2^{\omega(n)}}\sum_{d/n} f(d)$(4)

$\frac{1}{\tau(n)}\sum_{d/n} \mu^2(d)$, $\frac{1}{\tau(n)}\sum_{d/n} \mu^2(d)g(d)$ ,

$\frac{1}{2^{\omega(n)}}\sum_{n\in S_{u,n}} \mu^2(d)$ et $\frac{1}{2^{\omega(n)}}\sum_{n\in S_{u,n}} \mu^2(d)\, g(d)$, (5)

où $S_{u,n}$ est l'ensemble des diviseurs unitaires de $n$, $f$ et $g$ sont les fonctions vérifiant respectivement les conditions (1) et (2). Pour les deux premières fonctions, nous établissons l'existence de leurs fonctions de répartitions alors que pour les autres fonctions, c'est leurs moyennes sur les entiers friables qui feront l'objet de notre étude. Notons que la phrase $n$ est $y-$ friable signifie $P(n) \leq y$. En estimant les différentes fonctions citées en haut, nous répondons aux trois questions suivantes :

(a) Les fonctions arithmétiques vérifiant la condition (1) admettent-elles des fonctions de répartition ?

(b) Existe-t-elle une relation entre les valeurs moyennes des entiers sans facteur carré et celles des fonctions de type (2) ?

(c) Existe-t-elle une relation entre les valeurs moyennes des entiers sans facteur carré et celles des fonctions de type (2) sur les entiers $y-$ friables ?

Nous répondons à ces questions en construire, en premier lieu, un ensemble de fonctions additives admettant des fonctions de répartition et donner des exemples concrets de ce type de fonctions. En deuxième lieu, nous comparons les valeurs moyennes des fonctions du type (2) et celles des entiers sans facteur carré sur les entiers $y-$ friables.

Avant de présenter les méthodes utilisées dans cet article, nous mentionnons quelques concepts utilisés le plus souvent en théorie des nombres sous le thème suivant

### 1.2. Concepts et positions du problème

Nous présentons ici les notations et les définitions principales, et la position du problème traité dans ce travail. Dans cet article, un des concepts clé est la densité d'un sous ensemble $A$ de $\aleph$e. Elle est définie comme suit :

$$d(A) = \lim_{lim\to+\infty} \frac{card\{n\le x, n\in A\}}{X}.. \qquad (6)$$

Connaissant la densité d'un ensemble donné et une fonction arithmétique$f$, on définit sa fonction de répartition, pour $x \geq 1$, par

$$F_x(t) = \frac{1}{x}\sum_{,n\le x, f(n)\le t} 1 \;. \qquad (7)$$

Sa fonction caractéristique est

$$\varphi_F(t) = \frac{1}{x}\sum_{n\le x} \exp\{itf(n)\} \;. \qquad (8)$$

On dit qu'une fonction arithmétique réelle $f$ possède une fonction de répartition$F$ si la suite $\left(F_{[x]}\right)_{[x]\ge 1}$ converge simplement vers $F$.

En pratique, on utilise les résultats suivant :

Soit $f$ une fonction arithmétique additive réelle, telle qu'il existe, pour tous réels $\varepsilon > 0$, $a \geq 1$ ,$0 < \beta < 1$ et $T > 0$ , une fonction à valeurs dans $\mathbb{N}$ , $n \to a_\epsilon(n)$, vérifiant les conditions suivantes:

$$lim_{\epsilon\to 0} lim_{T\to+\infty} \sup(\bar{d}\{n: a_\epsilon(n) > T\} = 0 \qquad (9)$$

$$lim_{\epsilon\to 0} \bar{d}\{n: \left|f(n) - f\left(a_\epsilon(n)\right)\right| > \epsilon\} = 0 \;, \qquad (10)$$

$$d\{n: a_\epsilon(n) = a\} = \beta \qquad (11)$$

alors la fonction de répartition limite de $f$ existe.

D'autres caractérisations d'une fonction de répartition existent mais nous avons présenté celle qui est utilisée dans ce travail.

La position du problème est figure dans le paragraphe suivant.

Si $f$ désigne une fonction arithmétique et $A$ un sous ensemble de $\mathbb{N}$. Un des problèmes les plus traités est l'estimation de la fonction $S_A(x) = \sum_{n\le x, n\in\aleph} f(n)$, où $x$ est un réel $\geq 2$. Estimer une telle fonction revient à déterminer deux fonctions $S(x)$ et $r(x)$ telles que

$$S_A(x) = S(x) + r(x), \text{ avec } \lim_{x\to\infty} \frac{r(x)}{S(x)} = 0.$$

La fonction $S(x)$ appelée « partie principale » de la fonction $S_A(x)$ s'obtient via les méthodes analytiques, ou probabilistes ou élémentaires. Par contre le terme reste d'erreur « $r(x)$» reste difficile à expliciter et dépend des méthodes utilisées. En général, c'est ce terme qui est le nœud du problème à étudier. Un des objectifs d'une telle estimation est de minimiser ce terme d'erreur. Par exemple, pour notre cas, M. Naîmi n'a pas donné l'ordre de grandeur de ce terme alors que nous explicitons un tel ordre de grandeur. Si on consulte la littérature, on constate que la plupart des fonctions étudiées possèdent des séries de Dirichlet $\sum_{n\ge 1}\frac{f(n)}{n^s}$ qui se comportent au voisinage de 1 comme la fonction Zêta de Riemann $\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^s}$ losrque la partie réelle de $s$ est >1. L'ensemble $A$ peut-être $\mathbb{N}^*$, l'ensemble des nombres premiers et l'un des ensembles : $\{n,\ p/n,\ p \le y\}$,$\{n,\ p/n, p > y,\}$,$\{n\ ,p/n, z < p \le y\}$ ou $\{n, p/n\ ,\ p \le z \text{ ou } p \ge y\}$ , etc. Pour le cas qui nous concerne, nous avons considéré les fonctions de la forme $(\mu^2 * g)(n)$ où $g$ vérifie une certaine condition. L'ensemble considéré est$\{n,\ p/n,\ p \le y\}$. Un tel ensemble est appelé « un ensemble des entiers y-friables ». Le terme d'erreur obtenu est d'ordre de $\frac{1}{(loglogx)^\varepsilon}$ alors que l'ordre de référence est $\lim_{x\to+\infty} r(x) = 0$.

## 2. Méthodes

Nous utilisons dans ce travail les méthodes classiques qui sont connues en théorie des nombres. Il y a les méthodes analytiques, où on utilise les fonctions complexes via les séries de Dirichlet. Ces méthodes fournissent en général des bonnes estimations des valeurs moyennes des fonctions arithmétiques. En outre, elles permettent le plus souvent de connaitre les valeurs d'une fonction arithmétique sur les puissances d'un nombre premier sans préciser la définition de cette fonction. En général, ces méthodes font le plus souvent appel à la fonction Zêta de Riemann via sa représentation en produit eulérien qui est la suivante. Si $Res > 1$, nous avons

$Z(s) = \prod_{p\geq 2}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$.

L'autre méthode que nous utilisons est la convolution des fonctions arithmétiques. Cette méthode s'avère importante lorsqu'on veut estimer la valeur moyenne d'une fonction arithmétique qui est la convolution de deux autres fonctions et que la moyenne de l'une de ces fonctions est connue ou leurs deux moyennes. Pour faciliter la compréhension de cette méthode, nous rappelons la définition de la convolution. Si $f$ et $g$ sont deux fonctions arithmétiques, leur convolution s'écrit "$h = f * g$" et est définie par $h(n) = \sum_{d/n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$. Nous utilisons cette méthode dans le cas où la fonction à étudier "$h$" est de la forme $h = \mu^2 * f$, où "$f$" et une fonction que nous déterminerons. On peut faire aussi usage à la convolution lorsque, on veut utiliser la méthode de l'hyperbole (G. Tenenbaum, 1995). Cette méthode fait partie des méthodes élémentaires (H. Daboussi, 1982). Ce dernier chercheur a démontré le théorème des nombres premiers $(\sum_{p\leq x} 1 \sim \frac{x}{logx}, x \to +\infty)$ en utilisant la convolution.

La dernière méthode que nous ferons appel est la méthode probabiliste des nombres (G. Tenenbaum et J.Wu, 1995 ; H. Délange, 1982). On l'utilise lorsqu'on veut déterminer la densité d'un sous ensemble de ℕ ou d'évaluer la fonction de répartition d'une fonction arithmétique $f$.

Dans ce travail, nous étudierons l'existence de la fonction notée $F$ ainsi que son estimation, lorsque $f$ est de type (1). Il arrive que la fonction $F$ soit difficile à expliciter dans ce cas, on étudie la fonction caractéristique de $f$.Nous terminons par les estimations de différents types des valeurs moyennes.

## 3. Résultats

### 3-1. Résultats liés aux fonctions de répartition

Partant de l'hypothèse (1) pour une fonction arithmétique additive $f$, nous montrons que cette fonction admette une fonction de répartition limite $F$. C'est l'objet du théorème 3.1.

**Théorème 3.1** Soit $f$ une fonction arithmétique additive réelle vérifiant la condition (1), alors la fonction de répartition limite de $f$ existe.

**Remarque 3.1.1**La démonstration de ce théorème découle en partie du lemme suivant.

**Lemme 3.1.1** (G.Tenenbaum, 1995)

Soit $f$ une fonction arithmétique additive réelle, telle qu'il existe, pour tous réels $\varepsilon > 0, a \geq 1, 0 < \beta < 1$ et $T > 0$, une fonction à valeurs dans $N$, $n \to a_\epsilon(n)$, vérifiant les conditions suivantes:

$$lim_{\epsilon\to 0} lim_{T\to+\infty} \sup( \bar{d}\{n: a_\epsilon(n) > T\} = 0$$

$$lim_{\epsilon\to 0}\bar{d}\{n: |f(n) - f(a_\epsilon(n))| > \epsilon\} = 0,$$

$$d\{n: a_\epsilon(n) = a\} = \beta$$

alors la fonction de répartition limite de $f$ existe.

**Remarque 3.1.2.** Le lemme précédent est abondamment utilisé pour montrer l'existence d'une fonction de répartition limite**.**

**La preuve du théorème 3.1** Nous montrons d'abord que la condition (1) implique les conditions (9) et (10) du lemme précédent. Puis, nous montrons l'existence de la densité du type (11). On choisit un réel strictement positif $\varepsilon$ et un réel $y$ dépendant de $\varepsilon$, disons $y = y(\varepsilon)$ et soit

$a_\varepsilon(n) = \prod_{p\in S_n} p^r \prod_{p\in W_n} p^r$ , où

$S_n = \{p, p^r // n, p \leq y\}$et

$W_n = \{p, p^r / n, r \geq 2, p > y\}$.

.Décomposons l'entier sous la forme $= \prod_{p^r//n} p^r$ . Soit $a \in N^*$. La relation $a_\varepsilon(n) = a$ est équivalente à $n = am$, avec $\mu^2(m) = 1$ , $p^-(m) > y$ et $pgcd(a, m) = 1$.

Nous avons alors

$$log(a_\varepsilon(n)) = \sum_{p\in S_n} logp^r + \sum_{p\in W_n} logp^r$$

Par passage à la somme, on obtient,

$\sum_{n\leq x} log(a_\varepsilon(n)) = \sum_{p\leq y}\sum_{m\leq xp^{-r}} logp^r + W_1$,

où $W_1 = \sum_{p>y,r\geq 2}\sum_{m\leq xp^{-r}} logp^r$, cela s'écrit

$W_1 = \sum_{p>y}\sum_{r\geq 2}\left[\frac{x}{p^r}\right] logp^r$ .

La relation$\sum_{n\geq k} nx^n = \frac{x^k}{(1-x)^2}$, si $|x| < 1$ implique

$$W_1 \ll x\sum_{p>y}\frac{logp}{p^2} \ll \frac{xlogy}{y^2} W_1 \ll xlogy. \qquad (12)$$

De même, on montre que

$\sum_{p\leq y}\sum_{m\leq xp^{-r}} lpgp^r \ll xlogy(13)$

On peut alors écrire

$$\sum_{n\leq x,,a_\varepsilon(n)>T} 1 \leq \sum_{n\leq x}\frac{log(a_\varepsilon(n))}{logT} \ll \frac{xlogy}{logT}. \qquad (14)$$

On choisit $T$ tel que $\lim_{x\to+\infty}\frac{logy}{logT} = 0$.

De la relation précédente, on en déduit la relation (9).

Pour établir la relation$(10)$ , on utilise l'additivité de $f$ et on obtient alors

$f(n) = \sum_{p^r//n} f(p^r) + \sum_{p^r//n,,p>y} f(p) + W_2,$

où $W_2 = \sum_{p^r//n,,p>y,r\geq 2} f(p^r)$. De même

$f(a_\varepsilon(n)) = \sum_{p^r//n,,p>y} f(p^r) + W_2.$

Par conséquent

$$\sum_{n\leq x} |f(n) - f(a_\varepsilon(n))| \leq x \sum_{p>y} \frac{|f(p)|}{p}$$

$\ll \frac{x}{y}$. (15)

La relation (10) est une conséquence de l'estimation précédente.

Pour compléter la démonstration du théorème 3.1, il reste à établir l'existence de la densité de l'ensemble

$A_\varepsilon = \{n: a_\varepsilon(n) = a\}$ .

Or, nous avons $\sum_{n\leq x, a_\epsilon(n)=a} 1$

$= \sum_{m\leq\frac{x}{a}, \mu^2(m)=1, p^-(m)>y, (p/a, p>y, p^2/n)} 1$

$$= \frac{6}{\pi^2} \frac{x}{a} \prod_{p\leq y\ ou p/a} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}$$

lorsque $(p/a, p > y) => p^2/a$ et $d(A_\epsilon) = 0$ dans le cas contraire.

Dans le premier cas,

$d(A_\epsilon) = \frac{6}{a\,\pi^2} \prod_{p\leq y\ ou\ p/a} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}$..

On utilise alors le lemme 3.1.1 pour conclure.

**Corollaire 3.1.1.** Soit $S$ l'ensemble des fonctions multiplicatives possédant la propriété suivante. Une fonction multiplicative $f$ appartient à la classe $S$ si pour tout entier$k \geq 1$, il existe des nombres $a_{ik}$, $1 \leq i \leq k$ et un réel c$> 0$ tels que

$f_S(p^k) = p^k + a_{kk} + \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} p^i,$

avec$-1 \leq \ a_{ik} \leq c$ , (16),

alors les fonctions

$f_{\tau,k}(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d/n} log\left(\frac{f_S(d)}{d}\right)$et $f_{\omega,k}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d\in S_{u,n}} log\left(\frac{f_S(d)}{d}\right)$ admettent des fonctions de répartition.

**Preuve.** Nous remarquons que $f_S(n) > 0$ et que

$f_S(n) = n \prod_{p^k//n} \left(1 + \sum_{1\leq i\leq k} \frac{a_{ik}}{p^i}\right).$

Par conséquent

$$f_{\tau,k}(p) = \frac{1}{2} \sum_{d/p} log\left(\frac{f_S(d)}{d}\right)$$

$= \frac{1}{2} log\left(\frac{f_S(p)}{p}\right).$

Comme$\frac{f_S(p)}{p} = 1 + \frac{a_{11}}{p}$, nous avons

$f_{\tau,k}(p) = \frac{1}{2} log\left(1 + \frac{a_{11}}{p}\right) \ll \frac{1}{p}.$

Par conséquent la série $\sum_{p\geq 2} \frac{|f_{\tau,k}(p)|}{p}$ est convergente. On applique alors le théorème 3.1.

**Corollaire 3.1.2.** Si $f$ est un élément de l'ensemble $\left\{\frac{\varphi(n)}{n}, \frac{\sigma(n)}{n}, \frac{\varphi_k(n)}{n}\right\}$, alors les fonctions $\frac{1}{\tau(n)} \sum_{d/n} log(f(d))$ et $\frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d\in S_{u,n}} log(f(d))$ admettent des fonctions de répartition. Ici

$$\varphi_k(n) = n \prod_{p/n} \left(1 + \frac{k-1}{p}\right)$$

est la fonction de Dedekind généralisée.

**Preuve**. Elle découle du corollaire précédent et du fait que l'ensemble

$\left\{\frac{\varphi(n)}{n}, \frac{\sigma(n)}{n}, \frac{\varphi_k(n)}{n}\right\}$ est un sous ensemble de $S$

Les deux premières fonctions sont bien connues en théorie des nombres. Elles possèdent plusieurs propriétés. Par exemple, la fonction $\varphi$ est utilisée en théorie des groupes alors que $\sigma$ intervient dans l'étude des entiers abondants.

**Remarque 3.1.3.** Sous certaines conditions**,** le théorème 3.1 montre l'existence d'une fonction de réparation limite $F$ de $f$. Sa fonction caractéristique est donnée par

$\varphi_F(t) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{r\geq 0} \frac{e^{itf(p^r)}}{p^r}.$

Alors que la fonction caractéristique de la fonction

$F_x(t) = \frac{1}{x} \sum_{n\leq x, f(n)\leq t} 1$est

$\varphi_{F_x}(t) = \frac{1}{x}\sum_{n\leq x} e^{itf(n)}$,

l'inégalité de Berry-Essen (G.Tenembaum 1995) montre que

$Sup_{t\in R}|F(t)) - F_x(t)| \ll Q_F\left(\frac{1}{T}\right)+S_1$où

$$S_1 = \int_{-T}^{T} |\varphi_F(t) - \varphi_{F_x}(t)| \frac{dt}{|t|}$$

et $Q_F\left(\frac{1}{T}\right) = Sup_{t\in R}\left|F\left(t+\frac{1}{T}\right) - F(t)\right|$ et $T > 0$.

Pour les fonctions de la classe $S$, si on remplace $f(n)$ par $log\left(\frac{f_S(n)}{n}\right)$, on obtient

$\varphi_F(t) - \varphi_{F_x}(t) \ll \frac{1}{(logx)^2}$ .

En conséquence de cela, en posant

$T = exp\left\{logx\ \frac{clog_3 x}{10log_2(x)}\right\}$, nous avons alors

$Sup_{t\in R}|F(t)) - F_x(t)| \ll \frac{log_3(x)}{logxlog_3(x)}$ .

Des inégalités précédentes, nous déduisons que la convergence de la fonction de répartition $F_x$ vers $F$ lorsque x tend vers l'infini est équivalente de celle de $\varphi_{F_x}$ vers$\varphi_F$si $x \to +\infty$.

### 3.2. Résultats liés aux séries de Dirichlet associées aux fonctions étudiées et leurs valeurs moyennes

Pour $Res > 1$, si on note par $Z_2(s) = \sum_{n\geq 1}\frac{\mu^2(n)}{n^s}$, la série de Dirichlet associée à la fonction caractéristique des entiers sans facteurs carrés$\mu^2$, $l_1(s) = \frac{f(p)-1}{2(p^s+1)}$,

$l_2(s) = \frac{f(p)+1}{p^s+1}\left\{p^s log\left(1-\frac{1}{p^s}\right) - p^s - \frac{1}{2}\right\}$,

$$l_3(s) = \frac{f(p)+1}{2(p^s+1)}$$

$G_1(s) = \prod_{p\geq 2}\{1 + l_1(s) + l_2(s)\}$et

$G_2(s) = \prod_{p\geq 2}\left\{1 + l_3(s) + \frac{1}{2(p^{2s}-1)}\right\}$,

$f_{\tau,1}(n) = \frac{1}{\tau(n)}\sum_{d/n}\mu^2(d)f(d)$et

$f_{\omega,1}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}}\sum_{d\in S_{u,n}}\mu^2(d)f(d)$, où $f$ est la fonction de type (2)., on a le théorème suivant.

**Théorème 3.2** Avec les notations précédentes, les séries de Dirichlet des deux dernières fonctions vérifient les relations suivantes :

1) $\sum_{n\geq 1}\frac{f_{\tau,1}(n)}{n^s} = Z_2(s)G_1(s)$
2) $\sum_{n\geq 1}\frac{f_{\omega,1}(n)}{n^s} = Z_2(s)G_2(s)$.

**Preuve.** Ici, nous expliquons brièvement comment on obtient le théorème 3.2. . On écrit les produits eulériens des séries de Dirichlet $\sum_{n\geq 1}\frac{f_{\tau,1}(n)}{n^s}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{f_{\omega,1}(n)}{n^s}$ et on met en facteur le produit eulérien $Z_2(s)$. L'autre produit s'identifie soit à $G_1(s)$ ou $G_2(s)$. Les abscisses de convergences absolues de ces séries se déterminent à l'aide de la formule de Mac-Laurin à l'ordre 3 et l'utilisation des propriétés des séries entières.

Sous les mêmes conditions que le théorème précédent, on obtient le corollaire 3.2.

**Corollaire 3.2.1.** Soit un réel $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ et $x$ un réel plus grand que 1, on a

1) $\sum_{n\leq x} f_{\tau,1}(n) = \frac{6}{\pi^2}G_1(1)x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$
2) $\sum_{n\leq x} f_{\omega,1}(n) = \frac{6}{\pi^2}G_2(1)x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$.

**Preuve.** Nous remarquons que les fonctions apparaissant dans le théorème précédent s'écrivent comme $\mu^2 * h$ , où $h$ est une fonction arithmétique multiplicative dont sa série de Dirichlet converge pour $Res > \frac{1}{2}$.. C'est pour quoi les termes d'erreurs de ce corollaire font apparaître le facteur $\sqrt{x}$ . Ainsi l'estimation de la moyenne de la fonction $h$ est une conséquence du lemme suivant.

**Lemme 3.2.1** (G.Tenenbaum, 1995). La fonction sommatoire de la fonction caractéristique des entiers sans facteurs carrés vérifie la relation

$$\sum_{n\leq x}\mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x}). \tag{17}$$

### 3.3. Résultats relatifs aux valeurs moyennes des fonctions sur les entiers friables

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux valeurs moyennes des fonctions sur les entiers $y-$ friables. Une telle étude est plus complexe que celle menée pour établir le corolaire 3.2.1. Cette difficulté est due au fait que la fonction à étudier dépend de deux variables $x$ et $y$. En outre les valeurs moyennes varient selon la position de $y$ par rapport à $x$. Les résultats que nous avons trouvés sont valables lorsque $y \geq exp\{(loglogx)^{2+\varepsilon}\}$. Avant d'énoncer ces résultats, des notations préliminaires sont nécessaires. Pour $x \geq 1$ et

$y \geq exp\{(loglogx)^{2+\varepsilon}\}$, posons

$\gamma_1(x,y) = \sum_{n\leq x, P(n)\leq y} f_{\tau,1}(n)$ et

$\gamma_2(x,y) = \sum_{n\leq x, P(n)\leq y} f_{\omega,1}(n)$ ,

$R_{\varepsilon_1} = \frac{1}{(loglogx)^{\varepsilon_1}}$ et $R_{\varepsilon_2} = \frac{1}{(loglogx)^{\varepsilon_2}}$

Avec ces notations, nous avons le théorème ci-dessous.

**Théorème 3.3.** Il existe deux réels $\varepsilon_1$ , $\varepsilon_2$ compris entre 0 et 1 tels que

1) $\gamma_1(x,y) = \frac{6}{\pi^2} G_1(1,y)\rho(u)x\{1 + O(R_{\varepsilon_1})\}$
2) $\gamma_2(x,y) = \frac{6}{\pi^2} G_2(1,y)\rho(u)x\{1 + O(R_{\varepsilon_2})\}$

où $u = \frac{logx}{logy}$ et $\rho(u)$ est la fonction de Dickman définie par la relation (3). Ces résultats ont été obtenus par des méthodes élémentaires, basée sur la convolution.

La démonstration de ce théorème utilise en partie le théorème 3.2 et les résultats de A. Hildebrand (1986) et celui de A. Ivic (1985). Ces résultats sont la base de ce travail. Pour établir le théorème 3.3, nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.3.1** La fonction de Dickman vérifie les relations suivantes.

1) Pour $u \geq 1$ , on a $u\rho(u) = \int_{u-1}^{u} \rho(t)dt$

2)$-\frac{\rho'(u)}{\rho(u)} \leq log(ulog^2u), u \geq e^4$

3) $\frac{\rho(u-t)}{\rho(u)} \ll (ulog^2u)^t$ uniformément pour $u \geq 1$et $0 \leq t \leq u$. Ce lemme est établi par A. Hildebrand et G. Tenenbaum (1986). Nous prouvons seulement le premier résultat car le même raisonnement est valable pour l'autre fonction.

D'après le théorème 3.2, (1), pour $Res > 0$ , on peut écrire

$F_1(s,y) = Z_2(s,y)G_1(s,y)$ou encore

$F_1(s,y) = \prod_{p\leq y}\left(1 + \sum_{r\geq 1}\frac{f_{\tau,1}(p^r)}{p^{sr}}\right)$,

avec $Z_2(s,y) = \prod_{p\leq y}\left(1 + \frac{1}{p^s}\right)$

$G_1(s,y) = \prod_{p\leq y}\{1 + l_1(s) + l_2(s)\}$.

Le théorème 3.2 montre que $f_{\tau,1} = \mu^2 * g_1$. En considérant la contrainte $P(n) \leq y$. Le produit eulérien tronqué de la fonction $g_1$ est $G_1(s,y)$. Nous pouvons donc écrire,

$\gamma_1(x,y) = \sum_{d\leq x, P(d)\leq y} g_1(d)\, \theta_1\left(\frac{x}{d},y\right)$. Disons

$\gamma_1(x,y) = S_1 + S_2$, , avec

$S_1 = \sum_{d\leq loglogx, P(n)\leq y} g_1(d)\, \theta_1\left(\frac{x}{d},y\right)$et

$$S_2 = \sum_{d>loglogx, P(d)\leq y} g_1(d)\, \theta_1\left(\frac{x}{d},y\right)$$

Pour obtenir les relations précédentes, nous avons utilisé les produits eulérien des séries de Dirichlet sur les entiers $y-$friables. Pour obtenir les estimations souhaitées, nous utilisons l'estimation de la fonction $\theta_1(x,y)$ ( A. Ivic, 1985), à savoir

$\theta_1(x,y) = \frac{6}{\pi^2}\theta(x,y)\left\{1 + O\left(\frac{1}{(loglogx)^\epsilon}\right)\right\}$ (18)

uniformément pour $y \geq exp\{(loglogx)^{2+\epsilon}\}$

et celle de la fonction $\theta(x,y)$ établie par A. Hildebrand en 1986 . Il a montré que

$$\theta(x,y) = \rho(u)x\left\{1 + O\left(\frac{log(u+1)}{logy}\right)\right\} \quad (19)$$

uniformément pour

$y \geq exp\left\{(loglogx)^{5/3+\epsilon}\right\}$,

où$u = \frac{logx}{logy}$ et $\rho(u)$ est la fonction de Dickman

.En remplaçant successivement $\theta_1\left(\frac{x}{d},y\right)$ par ses expressions, on obtient :

$S_2 \ll x\sum_{d>loglogx, P(d)>y}\frac{g_1(d)}{d}\rho(u-u_d)$.

$$u_d = \frac{logd}{logy}$$

D'après le lemme 3.3.1, (3), on a

$$\rho(u-u_d) \ll \rho(u)exp\left(\frac{logu}{logy}\,logd\right)$$

$$\ll \rho(u)d^{\frac{logu}{logy}}$$

Ainsi, on obtient

$S_2 \ll x\rho(u)\sum_{d>loglogx}\frac{g_1(d)}{d^{1-\frac{logu}{logy}-\delta}}$ou

$$S_2 \ll x\rho(u)\frac{1}{(loglogx)^{1-\delta-\frac{logu}{logy}}}. \quad (20)$$

On a également

$$S_1 = C_x\sum_{d\leq loglogx,, P(d)\leq y}\frac{g_1(d)}{d}\rho(u-u_d) \quad (21)$$

$$C_x = \frac{6}{\pi^2}x\left\{1 + O\left(\frac{1}{(loglogx)^\epsilon}\right)\right\}$$

En utilisant la formule des Accroissements finis, le lemme 3.1, la relation (17) et la définition de "$u$" , on montre que

$$\rho(u-u_d)=\rho(u)\left\{1+O\left(\frac{1}{(loglogx)^{\varepsilon}}\right)\right\} \qquad (22)$$

Utilisant les relations (18) et (19), on obtient

$S_1 = C_u \sum_{d\le loglogx,,P(d)\le y} \frac{g_1(d)}{d}\rho(u)$ .

On peut écrire encore

$S_1 = C_x \sum_{d\ge 1,,P(d)\le y} \frac{g_1(d)}{d}\rho(u) + S_3$ , où

$S_3 = C_x \sum_{d> loglogx,,P(d)\le y} \frac{g_1(d)}{d}\rho(u)$.

La convergence de la série

$G_1(s) = \prod_{p\ge 2}\{1 + l_1(s) + l_2(s)\}$ dans le domaine $Res > \frac{1}{2}$ montre que

$\sum_{d> loglogx,,P(d)\le y} \frac{g_1(d)}{d} \ll \frac{1}{(loglogx)^c}$, $0 < c < 1$.

En groupant toutes les relations précédentes, on obtient l'estimation suivante

$\gamma_1(x,y) = \frac{6}{\pi^2} G_1(1,y)\rho(u)x\{1 + O(R_{\varepsilon_1})\}$.

**Corollaire 3.3.1**Sous la condition

$y \ge exp\{(loglogx)^{2+\varepsilon}\}$, lorsque $x \to +\infty$, on a

1) $\gamma_1(x,y) \sim G_1(1)\theta_1(x,y)$

2) $\gamma_2(x,y) \sim G_2(1)\theta_1(x,y)$

3) $\gamma_1(x,y) \sim \frac{G_1(1,)}{G_2(1)}\gamma_2(x,y)$.

**Preuve.** Comme$G_1(s,y) = \sum_{n\ge 1,p(n)\le y} \frac{g_1(n)}{n}$, on peut écrire

$$G_1(s,y) = \sum_{n\ge 1} \frac{g_1(n)}{n} - \sum_{n\ge 1,p>y,,p/n} \frac{g_1(n)}{n}$$

Le dernier terme est d'ordre $\frac{1}{y^{1-\delta}}$ qui est estimé par $\frac{1}{(loglogx)^c}$.

En conclusion, on peut écrire

$\gamma_1(x,y) = \frac{6}{\pi^2} G_1(1)\rho(u)x\{1 + O(R_{\varepsilon_1})\}$ .

Comme $\theta_1(x,y) = \frac{6}{\pi^2} x\rho(u)\{1 + O(R_\varepsilon)\}$,

on conclut, lorsque$x \to +\infty$,

que $\gamma_1(x,y) \sim G_1(1)\theta_1(x,y)$.

En suivant le même raisonnement que précédemment, on montre que $\gamma_2(x,y) \sim G_2(1)\theta_1(x,y)$

On en déduit alors que$\gamma_1(x,y) \sim \frac{G_1(1)}{G_2(1)}\gamma_2(x,y)$.

La suite de ce travail est réservée à la discussion.

## 4. Discussion

La plupart des entiers positifs possèdent des propriétés particulières. Par exemple, il y a des entiers sans facteur carré qui font l'objet de notre étude. Ces nombres constitue une suite de la forme 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33 · · · La relation (17) montre que la densité de ces entiers est $\frac{6}{\pi^2}$ , c'est à dire qu'il y a beaucoup d'entiers sans facteur carré, presque 2 sur 3 puisque $\frac{6}{\pi^2} = 0.607927$ ·

Pourtant, on ne sait pas montrer que, si$x$ est assez grand, l'intervalle $[x, x^{1/5}]$ contient un entier sans facteur carré. La recherche des entiers sans facteur carré dans de petits intervalles a attiré beaucoup d'attention par plusieurs chercheurs (F. Michael et T. Ognian, 1992). Au lieu de nous intéresser par la répartition des entiers sans facteur carré dans de petits intervalles, nous étudions ces entiers sous la contrainte $y-$ friables. Cette étude utilise en partie les résultats de A. Hildebrand (1986). de A. Ivic (1985) et celui de M. Naîmi (1987). Pour faciliter la compréhension de la suite du travail, nous rappelons, en suivant l'ordre précédent, ces résultats.

$\sum_{n\le x,P(n)\le y} 1 = \rho(u)x\left\{1 + O\left(\frac{log(u+1)}{logy}\right)\right\}$(23)

uniformément pour $y \ge exp\left\{(loglogx)^{5/3+\epsilon}\right\}$,

où$u = \frac{logx}{logy}$ et $\rho(u)$ est la fonction de Dickman.

$\sum_{n\le x\ P(n)\le y} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2}\rho(u)x\left\{1 + O\left(\frac{1}{(loglogx)^{\epsilon}}\right)\right\}$ (24)

uniformément pour $y \ge exp\{(loglogx)^{2+\epsilon}\}$.

$\sum_{n\le x,P(n)\le y} \mu^2(n)f(n) = \frac{6}{\pi^2} G(1,y)\ x\rho(u)\{1 + 0(1)\}$ uniformément lorsque$y \ge exp\{(loglogx)^{2+\varepsilon}\}$. (25)

Ici $G(s,y) = \prod_{p\le y}(1 + \frac{f(p)-1}{p^s+1})$ et $f$ est la fonction vérifiant la condition (1).

Dans le même ordre d'idées, nous avons démontré le résultat suivant :

$\sum_{n\le x,P(n)\le y} f_{\tau,1}(n) = \frac{6}{\pi^2} G_1(1,y)\rho(u)x\{1 + O(R_{\varepsilon_1})\}$. (26)

$\sum_{n\leq x, P(n)\leq y} f_{\omega,1}(n) = \frac{6}{\pi^2} G_2(1,y)\rho(u)x\{1+O(R_{\varepsilon_2})\}$. (27)

uniformément pour $x \geq 1$et $y \geq exp\{(loglogx)^{2+\varepsilon}\}$, avec

$f_{\tau,1}(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d/n} \mu^2(d) f(d)$,

$f_{\omega,1}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d\in S_{u,n}} \mu^2(d) f(d)$, où $f$ est la fonction de type (2) et

$R_{\varepsilon_1} = \frac{1}{(loglogx)^{\varepsilon_1}}$ et $R_{\varepsilon_2} = \frac{1}{(loglogx)^{\varepsilon_2}}$.

Les relations (23-27), contiennente le reel$\frac{6}{\pi^2}$. Ce derniel réel caractéristique les entiers sans facteur carré d'une part. D'autre part, la densité des entiers $y-$ friables, modulo un facteur multiplicatif près, est de$\frac{6}{\pi^2}\rho(u)$.Puisque$0 < \rho(u) < 1$, cette probabilité est plus petite par rapport à celle des entiers ordinaires sans facteur carré. Si on considère les termes d'erreurs, nous constatons que le nôtre est plus précis par rapport à celui obtenu par M. Naîmi, voir les relations (25-27). Cette différence montre l'importance de nos résultats. Pour atteindre cette amélioration, nous avons utilisé minutieusement les propriétés de la fonction $\rho(u)$ (lemme 3.3.1) d'une part. D'autre part, nous avons fait appel au théorème des accroissements finis. Une autre constatation à signaler pour les estimations (24-27) est le domaine d'étude de la variable "$y$". Ce domaine est le même pour les quatre estimations. Le choix de ce domaine est dû en partie par la méthode utilisée, d'ne part, et d'autre part, par l'irrégularité de la répartition des nombres premiers. Par exemple, G. Tenenbaum (1995) montre que $\theta(2x,y) \sim \theta(x,y)$ si et seulement si $y \leq (logx)^{1+0(1)}$ alors que si $\frac{logy}{loglogx}$ $x \to +\infty$, $\theta(2x,y) \sim 2\theta(x,y)$. L'idéal serait que $2 \leq y \leq x$ mais il est difficile de couvrir tout l'intervalle $[2,x]$ avec des méthodes élémentaires. Néanmoins, avec la méthode du col (G.Tenemnaum, 1987), on peut estimer ces fonctions sur un intervalle assez large que le nôtre mais les termes principaux et les termes d'erreur seront modifiés. La contribution de la fonction $\rho$ dans toutes les estimations des valeurs moyennes sur les entiers $y-$ friables est due aux méthodes utilisées (méthodes élémentaires). Si on utilise d'autres méthodes, il se pourrait que sa présence ne soit pas visible. Cette fonction est abondamment utilisée dans plusieurs travaux de la théorie des nombres (G. Tenenbaum, 1995 ; H.Smida , 1993 ; S. Nyandwi et A. Congera, 2020).

Les relations (17) et (24) montrent qu'il y a une relation entre les moyennes des entiers sans facteur carré et des entiers du même type et $y-$ friables.

En outre les relations (23) et (24) montrent que, lorsque $x$ est grand, la limite du rapport des fonctions estimées est $\frac{6}{\pi^2}$ à condition que $y \geq exp\{(loglogx)^{2+\epsilon}\}$.

La comparaison de nos résultats et ceux de M. Naîmi et A. Ivic, montre que les termes principaux diffèrent par des constantes liées aux fonctions étudiées. Malheureusement, nous n'avons pas peu les comparer car ces fonctions ne sont pas connues. Par contre, cette comparaison pourrait se faire pour la fonction généralisée de Dedekind $\varphi_k$. Mais la comparaison nécessiterait l'utilisation des séries entières. Cela pourrait se faire dans un travail ultérieur.

Les relations (26) et (27) mettent en évidence le lien entre les valeurs moyennes des fonctions sur les entiers sans facteur carré $y-$ friables et sur les diviseurs unitaires qui sont $y-$ friables. De plus, ces relations montrent que les fonctions estimées sont équivalentes à une constante près. Malheureusement, nous n'avons pas pu l'identifier. Pour comprendre davantage les propriétés des entiers $y-$ friables, on peut consulter les travaux de G. Tenenbaum (1995), H.Smida (1993), S. Nyandwi (2011), S. Drapeau (2016) et de J. H Van. Lint and H..E Richert (1964).

La majorité de ces résultats en lien avec cette catégorie d'entiers font apparaître en général, soit la fonction de Dickman $\rho(u)$ ou ses puissances.

Outre les entiers friables, on peut s'intéresser aux entiers $y-$ criblés (K. Alladi, 1982). C'est une étude qui tient seulement compte des entiers dont tous leurs facteurs premiers dépassent un réel $y$ donné. Pour ces entiers, peu de résultats existent dans la littérature, mais des exemples sont donnés (S. Nyandwi et A. Congera , 2020 ; G.Tenenbaum, 1995) dans la littérature. Il existe d'autre type d'entiers, à savoir les entiers ayant tous leurs facteurs premiers dans un intervalle du type $[z,y[$ , (Eric Saîas, 1992; Eric Saîas, 1993 et Eric Saîas, 1995) et les entiers qui n'ont aucun facteur premier dans l'intervalle précédent (S. Nyandwi et A. Congera , 2020 ; A. Weingartner, 2001).

Avant de clôturer cette partie de ce travail, nous parlons des diviseurs unitaires caractérisés par la relation(27). Cette catégorie de diviseurs n'est pas trop développée en théorie des nombres. C'est pourquoi, nous l'avons introduit dans ce travail. Même si nous avons fait appel au résultat de M. Naîmi, les fonctions étudiées ont été définies par nous-mêmes. En outre, le théorème 3.2 est le résultat dû à une intuition et la connaissance approfondie des propriétés des fonctions construites. On peut se poser la question : Pourquoi notre étude se limite-t-elle aux entiers sans facteur carré ? Cette restriction est due à la complexité du calcul des réels $(p^r)$ , où $r$ est un entier $\geq 2$ et $f$ est une fonction donnée. Grâce à cette limitation aux entiers sans facteur carré et aux diviseurs unitaires, les produits eulériens associés aux fonctions étudiées s'expriment simplement comme produit de deux séries connues. Dans l'avenir, nous pensons étudier les entiers qui ne sont pas divisibles par une puissance $k^{ieme}$ d'un nombre (M. Naîmi, 1987) ou les diviseurs exponentiels et $y-$ friables (J. Wu, 1995.

Avant d'aborder la dernière partie de travail qui est la conclusion, nous rappelons brièvement l'utilisation des fonctions de répartition. On les construit d'abord en utilisant les méthodes probabilistes (G.Tenenbaum, 1995 ; A. Hildebrand , 1986). C'est surtout les fonctions arithmétiques additives (P. Erdôs, 1945) le plus souvent traitées. En général, ces fonctions généralisent l'étude des densités des ensembles donnés. En statistique, si une variable aléatoire quantitative possède une loi, on peut utiliser sa fonction de répartition pour déterminer les probabilités. Leurs fonctions caractéristiques peuvent être utilisées pour déterminer les moments de la variable ou pour estimer cette variable en fonction d'une autre variable (Hogg. Mac Kean.Craig, 2005).

Nous mentionnons que les résultats obtenus dans cet article font surtout appel aux fonctions $\mu^2(n)$ et $\rho(u)$. La première fonction intervient beaucoup dans la factorisation d'un entier sous forme d'un produit de deux entiers : l'un sans facteur carré et l'autre abondant
$(p/n =\geq p^2/n)$ respectivement $(p/n =\geq p^3/n)$.
L'étude de la fonction $\mu^2(n)$ est facilitée par la simplicité de sa série de Dirichlet. Par sa définition de récurrence, on établit facilement plusieurs propriétés de la fonction $\rho(u)$ . Cette fonction intervient surtout dans l'étude des valeurs moyennes sur les entiers $y-$ friables lorsque la série de Dirichlet de la fonction à étudier s'écrit comme un produit de deux séries dont l'une converge dans la domaine $Res > 1-\delta, 0<\delta<1$. En général, dès qu'une telle relation existe, on peut faire recours à la méthode utilisée dans cet article. Le terme principal apparait facilement, il reste à expliciter le terme d'erreur. Il arrive que l'écriture de la série fait apparaître une puissance de la fonction zêta de Riemann, dans ce cas la fonction $\rho(u)$ est remplacée par une puissance de $\rho(u)$, voir les résultats de S. Nyandwi, H. Smida et de G. Tenenbaum.
Une autre façon d'estimer les quantités groupées dans le théorème 3.3, est d'utiliser la formule de Perron (G.Tenenbaum, 1995). C'est une méthode analytique qui consiste à exprimer une somme comme une intégrale d'une fonction complexe. Partant de l'intégrale, on choisit un contour approprié qui fournit un terme principal et un terme d'erreur beaucoup plus petit par rapport au terme principal. En théorie des nombres beaucoup de questions restent ouvertes à cause de leurs complexités, par exemple depuis 1881, Riemann a conjecturé que tous les zéros non triviaux de la fonction zêta sont de la forme $s=\frac{1}{2}+it, t\neq 0$. Depuis cette période, personne n'a pu confirmer ou rejette cette conjecture. Nous passons maintenant à la conclusion.

## 5. Conclusion

Dans ce travail, nous avons établi l'existence des fonctions de répartition d'une certaine catégorie des fonctions comme les fonctions $log\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)$, $log\left(\frac{\sigma(n)}{n}\right)$ et $log\left(\frac{\varphi_k(n)}{n}\right)$. De cela, nous pouvons déduire les densités des ensembles liés à ces fonctions. Nous avons également montré que les séries de Dirichlet de la fonction $\frac{1}{\tau(n)}\sum_{d/n}\mu^2(d)\left(\frac{f_k(d)}{d}\right)$ se comporte comme celle de la fonction $\mu^2(n)$ . Cette liaison de ces séries nous a permis de comparer les valeurs moyennes des fonctions précédentes. En tenant compte de la contrainte $y-$ friables, les relations restent conservées. Même si cette conservation est observée, les densités diffèrent selon la nature de la fonction étudiée. Notre résultat sur les entiers $y-$ friables est caractérisé par la prédominance fonction $\rho(u)$. Notre étude s'est focalisée sur une classe de fonctions via des entiers particuliers car l'étude des cas généraux reste difficile à traiter. Les méthodes utilisées dans ce travail peuvent être exploitées pour étudier les entiers $y-$criblés, cela fera l'objet d'une étude ultérieure. On pourra aussi étudier les entiers sans facteur premier dans un intervalle et sans facteur carré ou les entiers sans facteur carré dont leurs facteurs premiers sont à l'extérieur dans un intervalle.
Notons par ailleurs que l'utilisation de la méthode du col peut élargir le domaine d'étude, à savoir $x\geq y\geq 2$. Avec la formule de Perron, on pourra améliorer le terme reste du théorème 3.2.

## Références

[1] G.Tenenbaum : Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres. Société mathématique de France, (1995).

[2] A. Ivic: On square free nombre withrestricted prime factors. Studia. Scient. Math. Hungarica, V. 20 (1985), 189-192.

[3] M.Naïmi: Les entiers sans facteur carré$\leq x$ dont les facteurs premiers sont $\leq y$ . Groupe de travail en théorie analytique des nombres 1987, 69-76. Publ. Mth .Soc. Orsay 88-01, Univ. Paris XI.

[4] S. Gaboury: Sur la convolution des fonctions arithmétiques, Google Scolar, (2007).

[5] Sabah Al Fakir: Algèbre et théorie des nombres, Cryptographie, Primalité, Ellipses, (2003).

[6] H.Smida: Sur les puissances de la convolution de la fonction de Dickman , Acta Arithmetica V.59, (1991), 123-143.

[7] H.Smida: Valeurs moyennes de la fonction de Piltz sur les entiers sans grand facteur premier .Acta Arith59. ; (1993), 21-50.

[8] S. Nyandwi et A. Congera: Moyenne de la fonction de Piltz sur les entiers sans facteur premier dans un intervalle, Annales Univ.Sci. Budepest, Sect.Comp 50, (2020), 63-91.

[9] A. Hildebrand: On the number of positif integers$\leq x$ and free of Prime factors $> y$ . J. Number Theory, 22 (1986), 289-307.

[10] H. Daboussi: La méthode de convolution, théorie élémentaire et analytique des nombres, Univ. Valenciennes, (1982), 26-29.

[11] G. Tenenbaum et J.Wu : Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres. Sociétés mathématique de France, (1995).

[12] H. Délange: Théorie probabiliste des nombres, journée arithmétique, Metz, (1982), 37-42.

[13] A. Hildebrand et G. Tenenbaum,: On integers free of large prime factors, Trans.Amer. Math. Soc. 296, (1986), 265-290.

[14] S. Nyandwi: Répartition sur les entiers friables des fonctions arithmétiques liées aux fonctions de Piltz, Annales, Univ. Sci. Budapest Sect.Comp34, (2011), 201-222.

[15] S. Drapeau: Remarques sur les moyennes des fonctions de Piltz sur les entiers friables, The Quarterly Journal of Mathematics 67, (2016), 507-517J.

[16] H Van. Lint and H..E Richert: Uber die Sums$\sum_{n\leq x, P(n\leq y)}\frac{n\mu^2(n)}{\varphi(n)}$ Indag.Math.V36 (1964), 582-587.

[17] G. Tenenbaum: La méthode du col en théorie analytique des nombres, Paris, (1987), 411-441.

[18] K. Alladi: The distribution $\omega(n)$ in the sieve Eratosthenes, The Quarterly Journal Mathematics 33, (1982), 129-148.

[19] Eric Saîas: Entiers sans grand ni petit facteur premier I, Acta Arithmetica, (199 2 ), 347-374

[20] Eric Saîas: Entiers sans grand ni petit facteur premier II, Acta Arithmetica (1993), 287-312.

[21] Eric Saîas: Entiers sans grand ni petit facteur premier III, Acta Arithmetica LXXI (1995), 347-374

[22] A. Weingartner: Integers free of prime divisors on interval ActaArithmetica 98, (2001), 117-131.

[23] J. Wu: Problème de diviseursexponentiels et entiersexponentiellement sans facteurcarré Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 7, no 1 (1995), 133-141.

[24] P. Erdôs: On the distribution function of additive functions. Annales of Mathematicis 47 (1), (1945), 1-2.

[25] Hogg, R. V., J. W. McKean, and A. T. Craig. "Introduction to Mathematical Statistics: 6th (sixth) Edition." (2004).

[26] Filaseta, Michael, and Ognian Trifonov. "On gaps between squarefree numbers II." *Journal of the London Mathematical Society* 2.2 (1992): 215-221.

[27] Wu, Jie, and Qiang Wu. "Mean values for a class of arithmetic functions in short intervals." Mathematische Nachrichten 293.1 (2020): 178-202.

[28] De La Bretèche, R., and Gérald Tenenbaum. "Entiers friables: inégalité de Turán-Kubilius et applications." Inventiones mathematicae 159 (2005): 531-588.